

# Die Bethe-Goldstone-Gleichung bei geschwindigkeitsabhängigen Potentialen

Von M. WEIGEL

Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt am Main

(Z. Naturforsch. **19 a**, 1268—1273 [1964]; eingegangen am 23. Juli 1964)

The two-nucleon potential is assumed to be a quadratic function of momentum:  $v = v_1(r) + \mathbf{p} v_2(r) \mathbf{p}$ . The BETHE-GOLDSTONE equation ( $l=0$ ) has been solved for two different choices of  $v$ . An analytical, approximate solution is obtained.

Um das Verhalten der Streuphasen in der Nukleon-Nukleon-Streuung wiederzugeben, kann man entweder ein Potential mit einem „hard core“ oder ein geschwindigkeitsabhängiges Potential<sup>1–5</sup> verwenden. Auch die Energie pro Nukleon in Kernmaterie wurde sowohl für geschwindigkeitsabhängige Kräfte<sup>6</sup> als auch für ein „hard core“-Potential plus anziehender Wechselwirkung<sup>7, 8</sup> berechnet.

Auf Grund des PAULI-Prinzips erwartet man für die Lösungen der BETHE-GOLDSTONE-Gleichung nur dann größere Abweichungen gegenüber dem wechselwirkungsfreien Fall, wenn das Potential einen größeren Impulsaustausch oberhalb der FERMI-Grenze ermöglicht. Außerdem ist die Abweichung auf kleine Abstände beschränkt. Im Falle des „hard core“ weichen die Lösungen der BETHE-GOLDSTONE-Gleichung für kleine Abstände stark von den freien Lösungen ab; außerhalb der sogen. „healing distance“ gehen sie in dieselben über.

Es soll das Verhalten der Lösungen der BETHE-GOLDSTONE-Gleichung untersucht werden, wenn man geschwindigkeitsabhängige Potentiale verwendet.

Man hat zwei äquivalente Möglichkeiten für ein rotationsinvariantes, höchstens quadratisch vom Impuls abhängiges Potential:

$$\langle \mathbf{x} | v | \mathbf{x}' \rangle = \langle \mathbf{x} | \left( v_1(|\mathbf{x}|) + \frac{\lambda}{m} \mathbf{p} v_2(|\mathbf{x}|) \mathbf{p} \right) | \mathbf{x}' \rangle \quad (1a)$$

oder

$$\langle \mathbf{x} | \tilde{v} | \mathbf{x}' \rangle = \langle \mathbf{x} | \left( \tilde{v}_1(|\mathbf{x}|) + \frac{\lambda}{m} (\mathbf{p}^2 \tilde{v}_2(|\mathbf{x}|) + \tilde{v}_2(|\mathbf{x}|) \mathbf{p}^2) \right) | \mathbf{x}' \rangle. \quad (1b)$$

Beide fallen zusammen, wenn man setzt ( $r = |\mathbf{x}|$ ):

$$v_2(r) = 2 \tilde{v}_2(r), \quad (2a)$$

$$v_1(r) = \tilde{v}_1(r) - \frac{\lambda}{m} \left( \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \tilde{v}_2(r) + \frac{d^2}{dr^2} \tilde{v}_2(r) \right). \quad (2b)$$

## 1. Bethe-Goldstone-Gleichung

Nach BETHE und GOLDSTONE gilt für die Reaktionsmatrix<sup>7</sup>:

$$\langle \mathbf{k} | G | \mathbf{k}_0, \mathbf{P} \rangle = \langle \mathbf{k} | v | \mathbf{k}_0 \rangle + (2\pi)^{-3} \mathbf{P} \int d\mathbf{k}' \frac{\langle \mathbf{k} | v | \mathbf{k}' \rangle \langle \mathbf{k}' | G | \mathbf{k}_0, \mathbf{P} \rangle}{\varepsilon(\mathbf{P}, \mathbf{k}', \mathbf{k}_0)}. \quad (3)$$

Dabei ist  $2\mathbf{P}$  der Schwerpunktsimpuls. Die Integration über  $\mathbf{k}'$  ist so zu verstehen, daß  $|\mathbf{P} \pm \mathbf{k}'|$  größer als  $k_F$  ist. Außerdem gilt  $|\mathbf{P} \pm \mathbf{k}_0| < k_F$  ( $k_F$  FERMI-Impuls).

$$\varepsilon(\mathbf{P}, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = E(\mathbf{P} + \mathbf{k}_0) + E(\mathbf{P} - \mathbf{k}_0) - E(\mathbf{P} + \mathbf{k}) - E(\mathbf{P} - \mathbf{k}), \quad (4)$$

$E(\mathbf{k})$  ist die Energie des Nukleons mit dem Impuls  $\mathbf{k}$ .

Führen wir jetzt die Wellenfunktion  $\chi$  durch die Beziehung  $G = v \chi$  ein, so gilt für dieselbe im Ortsraum:

$$\chi(\mathbf{x}, \mathbf{k}_0, \mathbf{P}) = \exp(i\mathbf{k}_0 \mathbf{x}) + \int d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'' \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | v | \mathbf{x}'' \rangle \chi(\mathbf{x}'', \mathbf{k}_0, \mathbf{P}), \quad (5)$$

<sup>1</sup> J. S. LEVINGER, Proc. Int. Conf. Nuclear Structure (Kingston 1960), North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1960.

<sup>2</sup> M. RAZAVY, G. FIELD u. J. S. LEVINGER, Phys. Rev. **125**, 269 [1962].

<sup>3</sup> O. ROJO u. L. M. SIMMONS, Phys. Rev. **125**, 273 [1962].

<sup>4</sup> A. M. GREEN, Nucl. Phys. **33**, 218 [1962].

<sup>5</sup> E. WERNER, Nucl. Phys. **35**, 324 [1962].

<sup>6</sup> F. PEISCHL u. E. WERNER, Nucl. Phys. **43**, 372 [1963].

<sup>7</sup> H. A. BETHE u. J. GOLDSTONE, Proc. Roy. Soc., Lond. **A 238**, New York **3**, 241 [1958].

551 [1957].

<sup>8</sup> L. C. GOMES, J. D. WALECKA u. V. F. WEISSKOPF, Ann. Phys.,



$$\text{wobei} \quad \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} P \int d\mathbf{k} \exp\{i \mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\} \frac{\Theta(|\mathbf{P} + \mathbf{k}| - k_F) \Theta(|\mathbf{P} - \mathbf{k}| - k_F)}{\varepsilon(\mathbf{P}, \mathbf{k}, k_0)}; \quad (6)$$

$\Theta(x)$  ist die bekannte Sprungfunktion ( $\Theta(x) = 1$  für  $x > 0$ ;  $\Theta(x) = 0$  für  $x < 0$ ).

Da es uns auf das prinzipielle Verhalten der Wellenfunktion ankommt, können wir  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$  setzen. Dann separiert Gl. (5) in Polarkoordinaten, und für den radialen Anteil erhält man mit dem Potential (1) folgende Gleichung:

$$R_l(r, k_0) = j_l(k_0 r) + \int_0^\infty A_l(r, r' k_0) V_l(r') R_l(r', k_0) dr'. \quad (7)$$

$$\text{Dabei ist } (\hbar = 1): \quad j_l(x) = x^l \left( -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x}, \quad (8a)$$

$$V_l(r) = v_1(r) - \frac{\lambda}{m} \left( \left( \frac{d}{dr} v_2(r) \right) \frac{d}{dr} + v_2(r) \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \right), \quad (8b)$$

$$A_l(r, r', k_0) = \frac{2}{\pi} P \int_{k_F}^\infty r'^2 k^2 dk \frac{j_l(kr) j_l(kr')}{\varepsilon(\mathbf{0}, \mathbf{k}, k_0)}. \quad (8c)$$

Führt man jetzt die effektive Massenapproximation ein, so kann man leicht Gl. (7) in eine Integrodifferentialgleichung verwandeln.

$$\text{Mit} \quad \varepsilon(\mathbf{0}, \mathbf{k}, k_0) = \frac{1}{m^*} (k_0^2 - k^2) \quad \text{erhält man:}$$

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + k_0^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - m^* V_l(r) \right\} R_l(r, k_0) = -m^* \int_0^\infty K_l(r, r') V_l(r') R_l(r', k_0) dr', \quad (9)$$

$$\text{wobei} \quad K_l(r, r') = \frac{2}{\pi} \int_0^{k_F} r'^2 k^2 j_l(kr) j_l(kr') dk. \quad (10)$$

## 2. Behandlung spezieller Potentiale

Ausgehend von Gl. (7) und (9) wollen wir uns auf solche Potentiale beschränken, die bei der Streuung im Vakuum eine explizite Lösung zulassen. Man kann vermuten, daß für kleine Abstände diese Lösungen eine gute erste Approximation darstellen und auf dieser Basis (7) bzw. (9) näherungsweise lösen. Weiterhin ist bekannt<sup>8</sup>, daß nichtsinguläre, lokale Wechselwirkungen nur geringfügige Abweichungen bedingen, und wir wollen deshalb außerhalb der „Reichweite“ von  $v_2(r)$  das lokale Potential vernachlässigen.

Als Potential wählen wir<sup>2</sup>:

$$v_1(r) = -V_0 \Theta(b-r) - g \frac{\lambda}{m} \frac{\delta(r-b)}{r}, \quad v_2(r) = -\Theta(b-r). \quad (11)$$

Das Potential legt folgende Aufspaltung nahe ( $k_0$  unterdrückt):

$$R_l(r) = \Theta(r-b) F_l(r) + \Theta(b-r) G_l(r). \quad (12)$$

Die Beziehung (9) lautet damit  $[G_l(b) = F_l(b)]$ :

$$\begin{aligned} & \delta(r-b) \left( \frac{d}{dr} (F_l(r) - G_l(r) + \lambda^* G_l(r)) + g \frac{\lambda^*}{2r} (G_l(r) + F_l(r)) \right) + \Theta(r-b) L(r, k_0) F_l(r) \\ & \quad + (1 - \lambda^*) \Theta(b-r) L(r, k') G_l(r) \\ & = - \int_0^l dr' K_l(r, r') \left( (1 - \lambda^*) (k_0^2 - k'^2) + \lambda^* L(r', k_0) \right) G_l(r') + \lambda^* K_l(r, b) \left( \frac{d}{dr'} + \frac{g}{b} \right) G_l(r') \Big|_{r'=b}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{wobei} \quad \lambda^* = \frac{m^*}{m} \lambda; \quad k'^2 = \frac{m^* V_0 + k_0^2}{1 - \lambda^*}; \quad L(r, k) \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}. \quad (14a, b)$$

Beziehung (13) ergibt die Randbedingungen bei  $r=b$ :

$$F_l(b) = G_l(b); \quad \frac{d}{dr} F_l(r)|_{r=b} = (1-\lambda^*) \frac{d}{dr} G_l(r)|_{r=b} - \frac{g}{b} \lambda^* G_l(b). \quad (15 \text{ a, b})$$

Für die Streuung im Vakuum ( $k_F=0$ ) kann man (13) exakt lösen<sup>2</sup>. Es ergibt sich:

$$R_{lv}(r) = \Theta(b-r) d_l j_l(k' r) + \Theta(r-b) (j_l(k_0 r) - \operatorname{tg} \delta_l n_l(k_0 r)). \quad (16)$$

Die Konstanten  $d_l$  und  $\operatorname{tg} \delta_l$  ergeben sich aus den Randbedingungen (15).

Wir beschränken uns auf den Fall  $l=0$ . Hierfür ist es zweckmäßiger, die Funktion  $u(r) = r R_0(r)$  zu betrachten:

$$u(r) = \Theta(b-r) u_2(r) + \Theta(r-b) u_1(r). \quad (17)$$

Diese Funktion genügt folgender Gleichung:

$$\Theta(b-r) u_2(r) + \Theta(r-b) u_1(r) = \frac{\sin k_0 r}{k_0} + \int_0^b dr' \frac{r}{r'} \frac{A_0(r, r')}{m^*} \left( -m^* V_0 + \lambda^* \frac{d^2}{dr'^2} \right) u_2(r') - \frac{\lambda^*}{m^*} \frac{r}{b} A_0(r, b) \left( \frac{d}{dr'} - \frac{1}{r'} (1-g) \right) u_2(r') \Big|_{r'=b}. \quad (18)$$

Die Randbedingungen bei  $r=b$  lauten:

$$u_1(b) = u_2(b); \quad \frac{d}{dr} u_1(r)|_{r=b} = (1-\lambda^*) \frac{d}{dr} u_2(r)|_{r=b} + \frac{\lambda^*}{b} (1-g) u_2(b). \quad (19)$$

Gl. (18) bedingt das bekannte asymptotische Verhalten ( $k_F \neq 0$ ):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left( u_1(r) - \frac{\sin k_0 r}{k_0} \right) = 0. \quad (20)$$

Durch Anwendung des Operators  $(d^2/dr^2) + k_0^2$  und partielle Integration des Integrals der rechten Seite ergibt sich aus (18) folgende Integrodifferentialgleichung für  $u(r)$ :

$$\begin{aligned} \Theta(r-b) \left( \frac{d^2}{dr^2} + k_0^2 \right) u_1(r) + (1-\lambda^*) \Theta(b-r) \left( \frac{d^2}{dr^2} + k'^2 \right) u_2(r) \\ = \left( -m^* V_0 + \lambda^* \frac{d^2}{dr^2} \right) \int_0^b M(r, r') u_2(r') dr' - \lambda^* u_2(b) \left( \frac{d}{dr'} - \frac{1}{b} (1-g) \right) M(r, r') \Big|_{r'=b}, \end{aligned} \quad (21)$$

wobei

$$M(r, r') = -\frac{1}{\pi} \int_{-k_F}^{+k_F} \sin k r \sin k r' dk \quad (22)$$

ist. Benutzt man

$$\frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\sin k r \sin k r'}{k^2 - k_0^2} dk = \frac{1}{k_0} (\Theta(r-r') \cos k_0 r \sin k_0 r' + \Theta(r'-r) \sin k_0 r \cos k_0 r'), \quad (23)$$

so kann man (18) auf folgende Weise umschreiben:

$$u_1(r) = \frac{\sin k_0 r}{k_0} - \frac{(1-\lambda^*)(k_0^2 - k'^2)}{k_0} \cos k_0 r \int_0^b \sin k_0 r' u_2(r') dr' \quad (24)$$

$$\begin{aligned} + \lambda^* u_2(b) \left( \cos k_0 r \cos k_0 b - \frac{(1-g)}{k_0 b} \cos k_0 r \sin k_0 b \right) + \int_0^b P_1(r, r') u_2(r') dr' + \lambda^* u_2(b) P_2(r, b), \\ (1-\lambda^*) u_2(r) = \frac{\sin k_0 r}{k_0} - (1-\lambda^*)(k_0^2 - k'^2) \left( \cos k_0 r \int_0^r \frac{\sin k_0 r'}{k_0} u_2(r') dr' + \frac{\sin k_0 r}{k_0} \int_r^b \cos k_0 r' u_2(r') dr' \right) \\ - \lambda^* u_2(b) \left( \sin k_0 r \sin k_0 b + \frac{(1-g)}{k_0 b} \cos k_0 b \sin k_0 r \right) + \int_0^b dr' P_1(r, r') u_2(r') + \lambda^* u_2(b) P_2(r, b). \end{aligned} \quad (25)$$

Dabei ist:

$$P_1(r, r') = \frac{2}{\pi} P \int_0^{k_F} (\lambda^*(k^2 - k_0^2) + (1 - \lambda^*) (k'^2 - k_0^2)) \frac{\sin k r \sin k r'}{k_0^2 - k^2} dk,$$

$$P_2(r, r') = \frac{2}{\pi} P \int_0^{k_F} \left( k \cos k r' - \frac{(1-g)}{b} \sin k r' \right) \frac{\sin k r}{k_0^2 - k^2} dk. \quad (26)$$

Aus den Gln. (24) und (25) geht hervor, daß bis auf Quadratur nur die Integralgleichung (24) im Bereich  $[0, b]$  gelöst werden muß. Es ist nahelegend<sup>8</sup>, daß für kleine Abstände die Lösung des Vakuumstreuproblems eine gute Approximation darstellt. Dieselbe erfüllt auch die Randbedingung (19) und ist nach (16) explizit bekannt:

$$u_v(r) = \Theta(b-r) d_0 \frac{\sin k' r}{k'} + \Theta(r-b) \left( \frac{\sin k_0 r}{k_0} + \frac{\text{tg } \delta_0}{k_0} \cos k_0 r \right). \quad (27)$$

Die Konstanten  $d_0$  und  $\text{tg } \delta_0$  bestimmen sich aus (19).

Als erste Approximation führe ich in (24) und (25) auf der rechten Seite  $u_{2v}(r)$  ein. Die Integrationen lassen sich elementar durchführen.

Es ergibt sich:

$$u_1^{(1)}(r) = \frac{\sin k_0 r}{k_0} + \frac{\text{tg } \delta_0}{k_0} \cos k_0 r + F(r), \quad (28a)$$

$$u_2^{(1)}(r) = d_0 \frac{\sin k' r}{k'} + \frac{1}{1-\lambda^*} F(r). \quad (28b)$$

$F(r)$  ist im Anhang angegeben.

### 3. Numerische Ergebnisse

Wir verwenden im wesentlichen die von RAZAVY, FIELD und LEVINGER<sup>2</sup> vorgeschlagenen Potentialparameter. Das zweite Potential ( $g=1$ ) simuliert recht gut für höhere Energien die Streuphasen des „hard-core“-Potentials ( $r_c=0,295 f$ , s. Tab. 1, 2).

Gl. (24) kann man durch Iteration, beginnend mit  $u_{2v}(r)$ , lösen. Ein Maß für die Güte der Lösung ist die Befriedigung der Randbedingungen (19) bei  $r=b$ . Numerisch wurde gezeigt, daß (28) in den meisten Fällen ausreichend ist. Die Randbedingungen sind bis auf wenige Prozent erfüllt.

In Abb. 1, 2, 3 und in Tab. 3 sind die Lösungen für zwei Potentiale dargestellt. Die Abb. 1 stellt die Funktionen

$$g(r) = u(r) - u_0(r) \quad \text{und} \quad g_v(r) = u(r) - u_v(r)$$

für das Potential  $W_1$  dar. Es ergibt sich praktisch der Fall eines rein anziehenden Potentials<sup>7</sup>, da das

	$b(f)$	$V_0(\text{MeV})$	$\lambda$	$g$
Potential $W_1$	2,4	16,9	-0,21	0,0
Potential $W_2$	0,5	51	-1,64	1,0

Tab. 1. Potentialparameter<sup>2</sup>.

$E$ (MeV)	$\delta_0$ Potential $W_1$	$\delta_0$ Potential $W_2$	$\delta_0$ „hard core“ 0,295 f
30	0,750	-0,181	-0,178
60	0,474	-0,255	-0,251
90	0,273	-0,311	-0,308
150	0,002	-0,397	-0,397
210	-0,141	-0,465	-0,470
300	-0,196	-0,547	-0,562

Tab. 2. Streuphasen ( $l=0$ ;  $m^*/m=1$ ).

Potential nur schwach impulsabhängig ist ( $|\lambda|$  ist klein). Die Abweichungen von der freien Lösung sind sehr gering, so daß hier an sich eine Iteration beginnend mit  $u_0(r)$  an Stelle von  $u_v(r)$  angebracht gewesen wäre. Für das Ergebnis spielt das in diesem Falle keine Rolle. In Abb. 2 und 3 und in Tab. 3 ist für das Potential  $W_2$  für zwei Fälle  $k_F u(r)$ ,  $k_F u_0(r)$  und  $k_F u_v(r)$  dargestellt. Die Lösungen zeigen das typische Verhalten eines abstoßenden Potentials<sup>8</sup>. Die Abweichungen von  $u(r)$  gegenüber  $u_0(r)$  betragen bei  $r=b$  rund 20%. In Abb. 2 ist das Verhalten der BETHE-GOLDSTONE-Lösung  $k_F u_c(r)$  für das „hard core“-Potential ( $r_c=0,259 f$ ) qualitativ zum Vergleich mit angegeben. Für den FERMI-Impuls wurde der Wert  $k_F=1,28333 f^{-1}$  verwendet.

$k_F r$	$k=0,0 k_F$			$k=0,5 k_F$		
	$k_F u_0(r)$	$k_F u_v(r)$	$k_F u(r)$	$k_F u_0(r)$	$k_F u_v(r)$	$k_F u(r)$
0,64 = $k_F b$	0,64	0,36	0,44	0,63	0,37	0,41
0,80	0,80	0,52	0,63	0,78	0,52	0,60
1,28	1,28	1,00	1,19	2,20	0,97	1,09
2,08	2,08	1,81	2,09	1,73	1,59	1,73
3,21	3,21	2,92	3,26	2,00	2,01	2,06
4,65	4,65	4,37	4,66	1,46	1,65	1,47
6,42	6,42	6,14	6,39	-0,13	0,14	-0,17
8,50	8,50	8,22	8,51	-1,79	-1,67	-1,78
10,91	10,91	10,63	10,91	-1,47	-1,66	-1,47

Tab. 3. Wellenfunktionen ( $m^*/m=0,5$ ;  $r \geq b$ ).

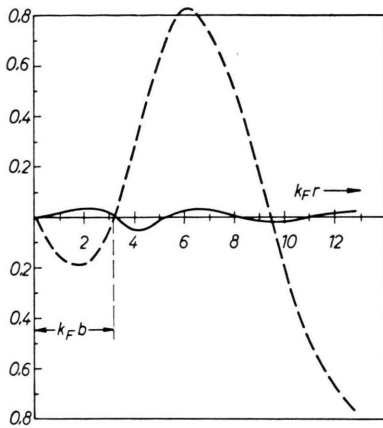


Abb. 1.  $k_F g(r) = k_F [u(r) - u_0(r)]$  (durchgezogene Kurve) und  $k_F g_v(r) = k_F [u(r) - u_v(r)]$  (gestrichelte Kurve) als Funktion von  $k_F r$  bei Verwendung des Potentials  $W_1$ . Parameter:  $k_0 = 0,5 k_F$ ;  $k = 0,582 k_F$ ;  $d_0 = 1,206$ ;  $\text{tg } \delta_0 = 0,391$ ;  $m^*/m = 0,5$ .

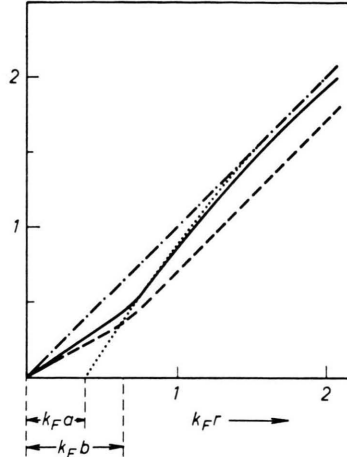


Abb. 2. Die Funktionen  $k_F u(r)$  (durchgezogene Kurve),  $k_F u_v(r)$  (isoliertes Nukleonenpaar, gestrichelte Kurve) und  $k_F u_0(r)$  (keine Wechselwirkung, strichpunktierte Kurve) als Funktion von  $k_F r$  bei Verwendung des Potentials  $W_2$ . Parameter:  $k_0 = 0,0 k_F$ ;  $k' = 0,453 k_F$ ;  $d_0 = 0,574$ ;  $k_F/k_0 \cdot \text{tg } \delta_0 = -0,279$ ;  $m^*/m = 0,5$ . Außerdem ist das qualitative Verhalten der „hard core“-Lösung  $k_F u_c(r)$  (punktierte Kurve) angegeben ( $r_c = 0,295 f$ ).

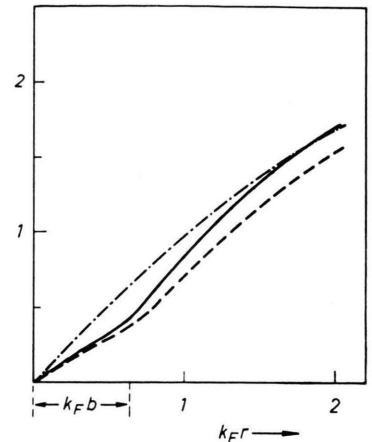


Abb. 3. Die Funktionen  $k_F u(r)$  (durchgezogene Kurve),  $k_F u_v(r)$  (gestrichelte Kurve) und  $k_F u_0(r)$  (strichpunktierte Kurve) als Funktion von  $k_F r$  bei Verwendung des Potentials  $W_2$ . Parameter:  $k_0 = 0,5 k_F$ ;  $k = 0,585 k_F$ ;  $d_0 = 0,586$ ;  $\text{tg } \delta_0 = -0,139$ ;  $m^*/m = 0,5$ .

Für fördernde Diskussionen möchte ich Herrn Prof. Dr. F. BECK und Herrn Prof. Dr. G. SÜSSMANN danken. Dem „Deutschen Rechenzentrum“ in Darmstadt danke ich für die Hilfe bei der numerischen Auswertung.

## Anhang

$F(r)$  ist nach (24), (25) und (28):

$$F(r) = \frac{2}{\pi} P \int_0^b dr' \int_0^{k_F} dk d_0 \frac{\sin k' r' \lambda^* (k^2 - k_0^2) + (1 - \lambda^*) (k'^2 - k_0^2)}{k_0^2 - k^2} \sin k r \sin k r' + \lambda^* d_0 \frac{\sin k' b}{k'} \frac{2}{\pi} P \int_0^{k_F} dk \frac{\sin k r}{k_0^2 - k^2} \left( k \cos k b - \frac{(1-g)}{b} \sin k b \right). \quad (\text{A } 1)$$

Ausführung der Integrationen ergibt<sup>9</sup>:

$$F(r) = \frac{d_0}{\pi k'} \left\{ -\lambda^* \gamma(r, b, k', -k') + \frac{1-\lambda^*}{2 k_0} (k'^2 - k_0^2) \left[ \frac{1}{k' - k_0} (\gamma(r, b, k_0, -k') - \gamma(r, b, k', -k')) + \frac{1}{k' + k_0} (\gamma(r, b, k', -k') - \gamma(r, b, -k_0, -k')) \right] - \frac{\lambda^*}{2} \sin k' b \left( \alpha(r+b) + \alpha(r-b) + \lambda^* \sin k' b \frac{1-g}{k_0 b} \gamma(r, b, k_0, 0) \right) \right\}. \quad (\text{A } 2)$$

Dabei sind folgende Definitionen vereinbart:

$$\gamma(r_1, r_2, k_1, k_2) = \frac{1}{2} f_1(r_1, r_2, k_1) \cos(r_2(k_1 + k_2) - r_1 k_1) - f_2(r_1, r_2, k_1) \sin(r_2(k_1 + k_2) - r_1 k_1) - f_1(-r_1, r_2, k_1) \cos(r_2(k_1 + k_2) + r_1 k_1) + f_2(-r_1, r_2, k_1) \sin(r_2(k_1 + k_2) + r_1 k_1), \quad (\text{A } 3 \text{ a})$$

$$\alpha(r) = f_1(0, r, k_0) \sin k_0 r + f_2(0, r, k_0) \cos k_0 r, \quad (\text{A } 3 \text{ b})$$

<sup>9</sup> F. TÖLKE, Praktische Funktionenlehre, Bd. I, Springer-Verlag, Berlin 1943.